

Wat is de Vierde Dimensie?

door Charles H. Hinton

1884

[Uit *Scientific Romances*, Deel. 1 (1884), pag. 1-22, *Speculations on the Fourth Dimension*, Selected Writings of Charles H. Hinton, Copyright 1980 by Dover Publications, Inc., ISBN 0-486-23916-0, LC 79-54399.]

Grenzen van Ons Bestaan

Tegenwoordig wordt ons handelen uitgebreid beïnvloed door onze theorieën. Wij hebben de eenvoudige een instinctieve manier van leven van de vroegere beschavingen ingeruild voor een leven dat wordt gestuurd door de hypothesen van onze kennis en aangevuld met allerlei intelligente hulpmiddelen. In een dergelijke toestand is het mogelijk te bedenken dat er een gevaar zou kunnen ontstaan, niet alleen door een behoefte aan kennis en praktische vaardigheid, maar namelijk uitgerekend door de aanwezigheid en het bezit daarvan in elk vakgebied, als er een gebrek aan informatie in andere vakgebieden bestaat. Als wij bijvoorbeeld met onze huidige kennis van de natuurkundige wetten en mechanische deskundigheid huizen zouden bouwen zonder rekening te houden met de vereisten die worden bepaald door de fysiologie, zouden wij ze waarschijnlijk – kennelijk voor het gemak – volstrekt tochtvrij maken en de best geconstrueerde huizen zouden dan vol verstikkende kamers zitten. De kennis van de structuur van het lichaam en de voorwaarden voor de gezondheid ervan voorkomen dat het schade lijdt door de uitbreiding van onze macht over de natuur.

Op dezelfde manier wordt het geestelijke evenwicht gered van de gevaren, die gepaard gaan met een aandacht die zich richt op de wetten van de mechanica, door op een juiste manier rekening te houden met het kenvermogen en de voorwaarden voor kennis. Wij handelen bewust of onbewust naar een bepaalde theorie of kijk op de dingen, waar wij ook mee bezig zijn. En als de grenzen van de dagelijkse routine doorlopend worden verengd door de steeds toenemende ingewikkeldheid van onze beschaving, wordt het dubbel belangrijk dat daarin niet alleen één, maar elke manier van denken wordt betrokken.

Er bestaan twee manieren om het gebied van de feitelijke zekerheid te overstijgen en een blik te werpen in het uitgebreide gebied van wat mogelijk is. Eén manier is door te vragen, “Wat is kennis? Waardoor wordt de ervaring gevormd?” Als we ons aan deze koers overgeven, storten wij onszelf in een zee van speculatie. Ware het niet dat de meest intense geestelijke vermogens daarin zo’n ruime bereik zouden vinden, dan zouden we terugkeren naar de vaste basis van de feiten, met slechts een gevoel van opluchting, dat we ontkomen aan een zo grote verwarring en tegenstrijdigheid.

De andere weg die ons voorbij de horizon van de feitelijke ervaring leidt is die van het ter discussie stellen van alles wat, op het terrein van de kennis, willekeurig en irrationeel begrensd lijkt. Van een dergelijk ter discussie stellen is vaak met succes gebruik gemaakt bij

het zoeken naar nieuwe feiten. Lang heeft men gedacht dat er vier gassen waren die niet vloeibaar gemaakt konden worden. Pas onlangs is een fysicus erin geslaagd om aan te tonen dat een dergelijk onderscheid bij gassen niet valt te maken. Kort geleden is opnieuw de vraag gerezen: “bestaat er geen vierde toestand van de materie?” Vaste, vloeibare en gasvormige toestanden zijn bekend. Mr. Crookes probeert het bestaan van een toestand aan te tonen, die van al die toestanden verschilt. Het is de bedoeling van dit artikel om dat te laten zien. Door bepaalde grenzen van de fundamentele voorwaarden, van het bestaan zoals wij dat kennen, weg te denken, kan een zinstoestand worden bedacht met krachten die onze eigen toestand ver overstijgen. Als dat is opgehelderd, is het niet misplaatst om te onderzoeken welke verbanden er zouden bestaan tussen onze manier van bestaan en de manier die als een mogelijke kan worden beschouwd.

Op de eerste plaats, wat is de beperking die wij weg moeten denken?

Een toeschouwer die in de hoek van een kamer staat heeft drie richtingen, die hem vanzelfsprekend ter beschikking staan; één is omhoog langs de lijn, waar de twee muren elkaar raken; een andere is naar voren, waar de vloer een van de muren raakt; de derde is zijwaarts, waar de vloer de andere muur raakt. Hij kan elke plek van de kamer bereiken door eerst een rechte afstand af te leggen langs de ene muur en dan door rechte hoeken te maken parallel langs de andere muur te lopen. In dat geval loopt hij allereerst in de richting van de rechte lijnen die elkaar in de hoek van de vloer raken en vervolgens in de richting van de andere. Door meer of minder in de richting van de andere te lopen, kan hij elk punt op de vloer bereiken en elke beweging, hoe kronkelig ook, kan ontbonden worden in eenvoudige bewegingen in deze twee richtingen.

Maar door in deze twee richtingen te bewegen is hij niet in staat om in de kamer omhoog te gaan. Als hij een punt van het plafond zou willen aanraken, zou hij zich moeten bewegen in de richting van de lijn waarop de twee muren elkaar raken. Er zijn dan drie richtingen, die elk een rechte hoek met beide andere maken, en die geheel onafhankelijk van elkaar zijn. Door in deze drie richtingen of combinaties daarvan te bewegen, is het mogelijk om elk punt van de kamer te bereiken. En als we veronderstellen dat de drie lijnen, die elkaar raken in de hoek van de kamer, zich tot in het oneindige uitstrekken, zou het mogelijk zijn om elk punt in de ruimte te bereiken, door in de richting van die drie lijnen te bewegen. In de ruimte bestaan dus drie onafhankelijke richtingen en uitsluitend die drie. Elke andere richting is samengesteld uit deze drie. De vraag die bij ons opkomt, is de volgende. “Waarom zouden er drie richtingen bestaan en uitsluitend drie richtingen?” De ruimte, zoals wij die kennen, is onderworpen aan een begrenzing.

Om een juist idee te krijgen van wat die begrenzing is, is het nodig dat wij ons eerst wezens voorstellen, die in een beperktere ruimte leven dan die waarin wij ons bewegen. Wij zouden dus een wezen kunnen bedenken dat, voor zijn hele scala van zijn ervaringen, beperkt is tot een enkele lijn. Een dergelijk wezen zou weten wat het was om heen en weer te bewegen, maar niet meer. De hele ruimte zou voor hem alleen maar een uitbreiding in het oneindige zijn, van de beide richtingen van de rechte lijn. Het is duidelijk dat twee van dergelijke wezens elkaar nooit zouden kunnen passeren. Wij kunnen bedenken dat ze de rechte lijn verlaten en er weer in terugkeren, maar omdat zij zich altijd in één rechte lijn hebben bewogen, zouden ze geen enkel idee hebben van een andere bewegingsrichting, waardoor een dergelijk resultaat zou kunnen worden bewerkstelligd. De enige figuur die in een dergelijk een-dimensionaal bestaan zou kunnen bestaan, zou een eindige rechte lijn zijn. Er zou geen

verschil zijn in de vorm van de figuren; het enige wat zou kunnen bestaan, zouden alleen maar langere of kortere rechte lijnen zijn.

Laten we een stap verder gaan in het domein van een denkbaar bestaan. Stel je een wezen voor dat beperkt is tot een plat vlak en gedurende het hele scala van zijn ervaringen nooit omhoog en omlaag is gegaan, maar zich uitsluitend in dit ene vlak heeft moeten ophouden. Veronderstel dan dat een dergelijk figuur, een cirkel of een rechthoek, over een gezichtsvermogen beschikt. Als een dergelijke figuur zich beweegt in het platte vlak waarin het is getekend, kan het in talrijke richtingen bewegen. Maar hoe verschillend die ook mogen lijken, deze richtingen zullen altijd zijn samengesteld uit twee richtingen die een rechte hoek met elkaar maken. Zolang als het platte vlak volmaakt horizontaal blijft, zal dat wezen zich met geen enkele beweging bewegen in de richting, die wij op en neer noemen. Het is belangrijk om op te merken dat het vlak voor het wezen dat daarin is opgesloten, anders zou zijn dan wat het voor ons is. Wij denken een vlak gewoonlijk met een boven- en een onderkant, omdat het wij alleen een vlak kunnen bewerkstelligen door lichamen die elkaar raken. Maar een schepsel dat gedurende zijn hele bestaan tot het vlak is beperkt, zou er geen idee van hebben dat er twee kanten zijn aan het vlak waar het in leeft. In een vlak bestaan alleen lengte en breedte. Als wij aannemen dat een schepsel weet heeft van op of neer, moet het ooit het vlak hebben verlaten.

Zou het dus mogelijk zijn dat een schepsel, dat in dergelijke omstandigheden verkeert, tot het besef zou komen dat er een op en neer bestaat, een richting die verschilt van de richtingen waar het aan is gewend, en die daar niets mee gemeen heeft? Duidelijk zou niets in zijn omstandigheden het daar iets over kunnen vertellen. Het zou alleen zelf door een proces van redeneren tot een dergelijke opvatting kunnen komen. Als het zich een wezen zou kunnen voorstellen dat tot een enkele lijn werd beperkt, zou het misschien kunnen beseffen dat het zelf in twee richtingen kan bewegen, terwijl het schepsel in een rechte lijn maar in één zou kunnen bewegen. Als het dat heeft bedacht zou het kunnen vragen, “Maar waarom is het aantal richtingen beperkt tot twee? Waarom zouden er geen drie zijn?”

Een schepsel (als er zo een zou bestaan), dat zich in een vlak beweegt zou onder veel gelukkiger omstandigheden verkeren dan een dat alleen in een rechte lijn zou kunnen bewegen. Want in een vlak bestaat de mogelijkheid van een oneindig aantal verschillende figuren, en het wezen dat wij hebben bedacht kan dan in aanraking komen met een oneindig aantal andere wezens. Het zou niet worden beperkt, zoals in het geval van het schepsel in de rechte lijn, tot alleen maar wezens aan weerszijden van hem.

Het is duidelijk dat het mogelijk zou zijn om merkwaardige spelletjes te spelen met een wezen dat tot een vlak is beperkt. Als wij bijvoorbeeld een wezen bedenken dat zich binnen in een vierkant bevindt, zou de enige weg naar buiten, die het zou kunnen bedenken, door een van de zijden van het vierkant zijn. Als de zijden ondoordringbaar zouden zijn, zou het een blijvende gevangene zijn en zou het geen uitweg hebben.

Hoe dat zou zijn zouden we kunnen begrijpen als we bedenken wat een soortgelijk geval in ons eigen bestaan zou betekenen. Het schepsel wordt in alle richtingen die het kent omsloten. Als een mens wordt omsloten in alle richtingen die hij kent, moet hij omgeven zijn door vier muren, een vloer en een dak. Een twee-dimensionaal wezen binnen een vierkant zou in precies dezelfde hachelijke toestand verkeren als een mens, als die zich in een kamer zonder enige opening zou bevinden. Voor ons zou het dus mogelijk zijn om een dergelijk wezen uit

het vierkant op te tillen en het daarbuiten weer neer te zetten. Een wezen waarmee dat zou gebeuren, zou merken dat het zich opeens buiten de plek bevond waarbinnen het zat opgesloten, en dat het door geen enkele begrenzing waar het door was omsloten heen was gegaan. De verbazing van een dergelijk wezen kun je je alleen voorstellen door het te vergelijken met wat een mens zou voelen, als hij opeens zou merken dat hij zich buiten de kamer zou bevinden waarin hij zich bevond, zonder dat hij door het raam, de deuren, schoorsteen of welke andere opening in de muren, plafond of vloer dan ook heen was gegaan.

Iets anders merkwaardigs dat met een twee-dimensionaal wezen uitgehaald zou kunnen worden is het volgende. Bedenk twee wezens die zich op een grote afstand van elkaar op een plat vlak bevinden. Als het platte vlak zo wordt gebogen dat zij dicht bij elkaar worden gebracht, zouden zij geen besef hebben van elkaars nabijheid, omdat voor beiden de enige mogelijke bewegingen, bewegingen in het vlak zouden lijken. Je zou kunnen bedenken dat de twee wezens, door een juiste buiging van het vlak, zo ten opzichte van elkaar zijn gebracht, dat ze zich precies tegenover elkaar bevinden. Maar als ze beiden met alle macht na zouden denken zouden ze toch kunnen aantonen dat er een grote afstand tussen hen bestaat. Het buigen zou zover kunnen worden doorgevoerd dat het ene wezen opeens naast het andere in het vlak zou verschijnen. Als deze wezens niet op de hoogte zouden zijn van het bestaan van een derde dimensie, zou dat resultaat net zo wonderlijk voor hen zijn, als het voor een menselijk wezen zou zijn, dat zich op een grote afstand bevond, – het zou zich aan de andere kant van de wereld kunnen bevinden – om plotseling te verschijnen en zich in werkelijkheid naast ons te bevinden, terwijl het de plaats waar het zich bevond de hele tijd niet had verlaten.

Het Construeren van een Vierde Macht

De voorgaande voorbeelden maken duidelijk dat je wezens kunt bedenken die in een begrensde ruimte leven dan de onze. Bestaat er een vergelijkbare begrenzing in de ruimte die wij kennen?

Net op de drempel van de rekenkunde stuiten wij op een dergelijke beperking.

Als wij een rechte lijn voor ons hebben met een lengte van twee cm, wordt de lengte daarvan uitgedrukt met het getal 2. Stel je een vierkant voor dat op die lijn wordt getekend. Het aantal vierkante cm. in die figuur wordt uitgedrukt met het getal 4, dat is 2×2 . Dit 2×2 wordt doorgaans geschreven als 2^2 , en “2 kwadraat” genoemd.

Het rekenkundige proces van vermenigvuldiging is echter op geen enkele manier identiek met het proces waarbij een vierkant wordt voortgebracht door het bewegen van een rechte lijn, of een kubus door het bewegen van een vierkant. Maar je hebt gezien dat de eenheden in beide gevallen, hoewel verschillend van aard, hetzelfde aantal hebben.

Als we twee dingen twee keer aanraken, wordt de handeling van het aanraken viermaal uitgevoerd. Rekenkundig, $2 \times 2 = 4$. Als een vierkant wordt voortgebracht door het bewegen van een lijn van twee cm lang, bevat dat vierkant vier vierkante cm.

Zo is het gekomen dat de tweede en derde macht van getallen “vierkant” en “kubus” worden genoemd.

Wij hebben nu een lijn van twee cm. lang. Daarop is een vierkant geconstrueerd dat vier vierkante cm. bevat. Als op dezelfde lijn een kubus wordt geconstrueerd, bedraagt het aantal kubieke cm. in de figuur die op die manier is gemaakt 8, dat is $2 \times 2 \times 2$ of 2^3 . We hebben nu een reeks figuren, die corresponderen met de getallen $2, 2^2, 2^3$. Elke figuur bevat meer eenheden dan de voorgaande en in elke figuur is de eenheid van een andere soort. In de eerste figuur, een rechte lijn, is de eenheid namelijk een lineaire cm; men zegt dat het één dimensie heeft. In het tweede is de eenheid het vierkant, namelijk een vierkante cm. Het vierkant is een figuur met twee dimensies. In het derde geval is de kubus de eenheid en de kubus heeft drie dimensies. Men zegt dat de rechte lijn één dimensie heeft omdat die maar op één manier kan worden gemeten. De lengte ervan kan worden bepaald, maar zij heeft geen breedte of dikte. Men zegt dat het vierkant twee dimensies heeft omdat hij zowel lengte als breedte heeft. Van de kubus wordt gezegd dat die drie dimensies heeft, omdat zij op drie manieren kan worden gemeten.

Als we naar deze getallen, $2, 2^2, 2^3$, kijken rijst natuurlijk de vraag met wat voor figuur wij 2^4 , of $2 \times 2 \times 2 \times 2$, moeten voorstellen. Wij weten dat in die figuur zestien eenheden moeten zitten, of twee keer zoveel eenheden als in een kubus. Maar ook de eenheid zelf moet een andere zijn. En die moet niet alleen in vorm van een kubus verschillen. Die moet net zoveel verschillen van een kubus als een kubus van een vierkant verschilt. Geen enkel aantal vierkanten kan een kubus vormen, omdat geen elk vierkant dikte heeft. Op dezelfde manier kan geen enkel aantal kubussen deze nieuwe eenheid vormen. En laten wij nu, in plaats van iets bekends te vinden, waaraan het idee van een figuur die met de vierde macht overeenstemt kan worden opgehangen, gewoon beredeneren wat de eigenschappen van een dergelijke figuur moeten zijn. Bij deze poging moeten we ons niet verlaten op een procédé van aanraken of kijken, zoals dat ons gegevens verschaft over de eigenschappen van lichamen in de ons bekende ruimte, maar op een denkmethode. Elk feit dat met deze onbekende figuur heeft te maken moet beredeneerd worden; en pas na het doorlopen van een aantal stappen, kan er enige vertrouwdheid met de eigenschappen ervan worden bereikt. Van alle manieren van het gebruiken van het verstand is dit onderzoek misschien datgene wat, door de eenvoud van de gegevens waarover het gaat, de grootste oefening in de abstracte verbeelding vraagt en om deze reden de moeite van een geduldige aandacht waard is. De eerste stappen zijn heel eenvoudig. Wij moeten ons een eindige rechte lijn voorstellen die op het vlak van het papier een kubus voortbrengt, en dat dit vierkant op zijn beurt een kubus voortbrengt door recht omhoog te bewegen. Figuur 1. stelt een rechte lijn voor; figuur 2. stelt een vierkant voor, dat is gevormd door het bewegen van die rechte lijn; figuur 3. stelt vervolgens een kubus voor die gevormd is door het omhoog bewegen van het vierkant ABCD. De basis is dan ABCD en het bovenvlak EFGH.



FIGURE 1

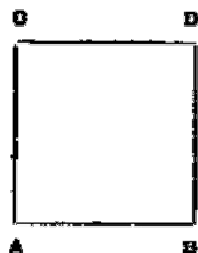


FIGURE 2

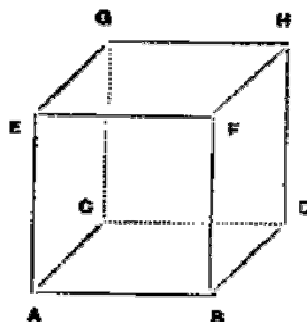


FIGURE 3

De rechte lijn AB brengt het vierkant ABCD tot stand door een beweging die een rechte hoek maakt met zichzelf. Als die beweging wordt beperkt tot de rechte lijn AB, is er alleen een beweging naar voren en naar achteren mogelijk. Een zijwaartse beweging is niet toegestaan. En als wij het bestaan van een wezen aannemen dat alleen in de rechte lijn AB zou kunnen bewegen, zou het geen idee hebben van enige andere beweging dan heen en weer. Het vierkant ABCD wordt gemaakt door een beweging vanaf de rechte lijn in een richting die volstrekt anders is dan de beweging die in AB bestaat. Deze beweging kan niet worden uitgedrukt door middel van enige mogelijke beweging in AB. Een wezen dat in AB zou bestaan en wiens ervaring beperkt was tot wat er in AB zou kunnen gebeuren, zou niet in staat zijn om de aanwijzingen te begrijpen, die wij zouden geven om AB de figuur ABCD te laten maken.

In de figuur ABCD bestaat de mogelijkheid om een groot aantal verschillende kanten op te bewegen, zolang die richtingen beperkt blijven tot een vlak. Alle richtingen in dit vlak kunnen worden beschouwd als combinaties van twee richtingen, namelijk van A naar B en van A naar C. Onder het oneindige aantal van dergelijke richtingen is er geen een die een richting loodrecht op figuur 2 vertoont; er is er geen een die van het vlak van het papier omhoog gaat. Stel je een wezen voor dat in het vlak bestaat en alleen daarin kan bewegen. Bij alle bewegingen die het volbrengt zou er geen een zijn waardoor hij de verandering zou kunnen begrijpen van figuur 2 naar wat figuur 3 in perspectief voorstelt. Want om van 2, 3 te worden moet worden aangenomen dat het loodrecht op zijn eigen vlak moet bewegen. De figuur die het dan schetst is de kubus ABCDEFGH.

Alle richtingen, zo veel als er zijn, waarin een schepsel, dat in figuur 3 bestaat, zou kunnen bewegen, zijn samengesteld uit drie richtingen. Van A naar B, van A naar C, van A naar E. Er bestaan geen andere richtingen die het kent.

Maar als wij ons voorstellen dat er iets dergelijks met figuur 3 zou worden gedaan, iets van dezelfde aard als er met figuur 1 is gedaan om het in figuur 2 te veranderen, of met figuur 2 om het in figuur 3 te veranderen, moeten we aannemen dat de hele figuur, zoals die is, in een of andere richting wordt bewogen, die volledig anders is dan elke andere richting binnen die figuur, en die niet wordt gevormd door enige combinatie van richtingen daarbinnen. Wat is dat? Is dat de vierde richting?

Wij kunnen ons daar evenmin een beeld van vormen als een schepsel, dat in de vlakke figuur 2 leeft, zich een zodanige richting voor zou kunnen stellen dat het, door het vierkant 2 in die richting te bewegen, de kubus 3 zou worden. Voor een dergelijk schepsel zou de derde dimensie net zo onbegrijpelijk zijn als de vierde voor ons. En op dat punt moeten we afzien van de hulp die wij van enig beschikbaar voorwerp zouden kunnen krijgen en moeten wij gewoon onderzoeken wat de eigenschappen zijn van de meest eenvoudige figuur in vier dimensies, door de analogie door te trekken die, zoals wij weten, bestaat tussen het procédé van het vormen van 2 uit 1, van 3 uit 2, en tot slot van 4 uit 3. Laten wij voor het gemak de figuur die wij gaan onderzoeken – de eenvoudigste figuur in vier dimensies – een vierde macht noemen.

Allereerst moeten we opmerken dat als een kubus wordt gevormd door het bewegen van de vierhoek in een nieuwe richting, elk punt van het inwendige van het vierkant een deel van de kubus schetst. Het zijn niet alleen de grenslijnen die door hun bewegen de kubus vormen, maar elk deel van het inwendige van het vierkant brengt een deel van de kubus voort. Dus als

een kubus in de vierde dimensie zou bewegen om een vierde macht teweeg te brengen, zou elk punt van het inwendige van de kubus *de novo* beginnen en een deel van de nieuwe figuur schetsen, ongehinderd door de andere punten.

Of al we de zaak in een ander licht bekijken, ziet een wezen in drie dimensies, dat neerkijkt op een vierkant, elk deel daarvan voor zich uitgespreid, en kan het elk deel aanraken zonder door de omgevende delen heen te dringen, want het kan er van bovenaf bij, terwijl de omgevende delen het gedeelte omgeven dat hij maar in één vlak raakt.

Dus een wezen in vier dimensies zou ieder punt van een driedimensionale figuur kunnen zien en aanraken. Geen enkel deel zou schuil gaan achter een ander deel, want hij zou naar elk deel kijken vanuit een richting die volmaakt anders is dan enige andere, waarin het mogelijk is om van het ene deel van het lichaam naar het andere te gaan. Om van het ene deel van het lichaam naar een ander deel te gaan is het nodig om in drie richtingen te bewegen, maar een schepsel in vier dimensies zou naar een driedimensionaal lichaam kijken vanuit een richting die geen enkele van deze drie is.

Laten we een paar feiten verzamelen over de vierde figuur, door verder te gaan volgens de analogie die er bestaat tussen 1, 2, 3, en 4. In figuur 1 zijn twee punten aanwezig. In 2 zijn er vier punten – de vier hoekpunten van het vierkant. In 3 zijn er acht punten. Als wij volgens dezelfde wetmatigheid verdergaan, zouden er in volgende figuur zestien punten moeten zijn.

In figuur 1 is er één lijn. In het vierkant zijn vier lijnen aanwezig. In de kubus zijn twaalf lijnen. Hoeveel lijnen zouden er dan bestaan in de vierde macht? Het wil dus zeggen dat er drie getallen zijn – 1, 4, en 12. Wat is het vierde, als we dezelfde wet aanhouden?

Laten we om deze vraag te beantwoorden wat gedetailleerder beschrijven hoe de ene figuur in de andere verandert. De lijn beweegt om een vierkant te worden; zij bezet eerst haar oorspronkelijke positie, en op het laatst haar eindpositie. Zij begint als AB en eindigt als CD; zo verschijnt de lijn twee keer, of wordt verdubbeld. De twee andere lijnen in het vierkant, AC en BD worden gevormd door het bewegen van de punten aan de uiteinden van de bewegende lijn. Zo verdubbelen de lijnen zich, door van de rechte lijn over te gaan in het vierkant en ieder punt maakt zo een lijn. Als in het geval van het veranderen van het vierkant in de kubus hetzelfde procédé geldt, moeten we in de kubus het aantal lijnen, dat zich in het vierkant bevond – dat zijn er acht – hebben verdubbeld en elk punt in vierkant moet dan een lijn zijn geworden. Omdat er vier hoekpunten in het vierkant zijn, zouden we daar in de kubus vier lijnen door moeten krijgen, dat wil zeggen, als we die aan de eerste acht toevoegen, dat er twaalf lijnen in de kubus zouden moeten zijn. Dat is duidelijk het geval. Om het aantal lijnen in de vierde macht af te leiden, mogen we derhalve die wet gerust toepassen. Verdubbel het aantal lijnen in de vorige figuur en voeg daar net zoveel lijnen aan toe als er punten zijn in de vorige figuur. De kubus heeft nu twaalf lijnen en acht punten. Dus krijgen we in de vierde macht $2 \times 12 + 8$, of tweeëndertig lijnen.

Op dezelfde manier kan elke andere vraag over de vierde macht worden beantwoord. We moeten ons begripsvermogen laten varen en antwoorden aan de hand van de analogie die we moeten uitwerken, aan de hand van de drie figuren die wij kennen.

Als wij dus willen weten hoeveel platte vlakken de vierde macht heeft, moeten we beginnen met de lijn, die er geen enkele heeft; het vierkant heeft er een; de kubus heeft zes vlakken. Zo krijgen we drie getallen, 0, 1, en 6. Wat is het vierde getal?

Bedenk hoe de vlakken van de kubus omhoog rijzen. In het begin van zijn beweging bepaalt het vierkant een van de zijden van de kubus; aan het eind is dat de tegenoverliggende zijde; tijdens het bewegen vormt elk van de lijnen van het vierkant een vlakke zijde van de kubus. Zo verdubbelen we de vlakken van de vorige figuur en elke lijn in de vorige figuur maakt een vlak in de volgende.

Pas deze regel toe bij het vormen van een vierkant vanaf een lijn. In de lijn is geen plat vlak aanwezig en omdat tweemaal niets niets is, krijgen we in zoverre geen vlak in het vierkant. Maar in de rechte lijn bevindt zich een lijn, namelijk de lijn zelf en die vormt door haar beweging het platte vlak van het vierkant. Dus bij het vierkant geeft de regel, zoals het hoort, één vlak.

Door deze regel toe te passen in het geval van de kubus, krijgen we er 12, door het verdubbelen van de vlakken; en als we een vlak toevoegen voor elk van de rechte lijnen, waar er 12 van zijn, hebben er nog eens 12, of 24 platte vlakken in totaal. Net als door betasten ervan of er naar te kijken, is het mogelijk om op die manier een figuur in de ruimte te beschrijven, dus door een procédé van berekenen door te lopen zijn wij in staat om alle eigenschappen te beschrijven van een figuur in vier dimensies.

Er is nog een kenmerk dat zo opmerkelijk is dat het een aparte vermelding verdient. In het geval van een eindige rechte lijn vormen de eindpunten de grenzen. Als we maar met een enkele dimensie hebben te maken, is figuur 1, die van een stuk van een rechte lijn, door de twee punten aan de uiteinden daarvan, afgesneden en afgescheiden van de rest van een denkbeeldige oneindige lange rechte lijn. In dit eenvoudige geval corresponderen de twee punten met het grensvlak van de kubus. In het geval van een twee-dimensionale figuur geeft een oneindig vlak de gehele ruimte weer. Het vierkant wordt afgezonderd door vier rechte lijnen en het is onmogelijk om het inwendige van het vierkant binnen te komen, behalve door dwars door de rechte lijnen heen te gaan. In deze gevallen is het dus duidelijk dat de grenzen van de figuur één dimensie minder tellen dan de figuur zelf. Punten begrenzen lijnen, lijnen begrenzen vlakke figuren, vlakken begrenzen lichamen. Dus moeten lichamen vier-dimensionale figuren begrenzen. De vierde macht moet op de volgende manier worden begrensd. Om te beginnen is er de kubus die, door haar beweging in de vierde richting, de figuur doet ontstaan. Dit vormt in haar beginpositie de basis van de vierde macht. In de eindpositie vormt het het tegenovergestelde einde. Tijdens het bewegen leidt elk van de zijden van de kubus tot een andere kubus. De richting waarin de kubus beweegt is zodanig dat van al de zes zijden geen enkele ook maar in het minst naar die richting overhelt. De richting maakt rechte hoeken met al die richtingen. De basis van de kubus, de bovenkant van de kubus en de vier zijden van de kubus, vormen elk afzonderlijk en allemaal kubussen. Derhalve wordt de vierde macht begrensd door acht kubussen. Samengevat zou de vierde macht 16 punten hebben, 32 lijnen, 24 vlakken en zou begrensd worden door 8 kubussen.

Als een vierde macht in de ruimte zou verblijven, zou het voor ons een kubus lijken.

Om deze conclusie te verantwoorden hoeven we alleen maar te bedenken hoe een kubus er voor een twee-dimensionaal wezen uit zou zien. Om van al haar mogelijkheden gebruik te

kunnen maken, moet de kubus in contact komen met het vlak waarin zij beweegt. Als zij in een zo nauw mogelijk contact wordt gebracht met dit vlak, rust ze daarop met een van haar oppervlakken. Dit oppervlak is een vierkant en het enige dat een twee-dimensionaal wezen van een kubus zou kunnen weten, zou een vierkant zijn.

Nu we zo hebben gezien hoe het mogelijk is om de eigenschappen van de meest eenvoudige vorm in vier dimensies te beschrijven, is het duidelijk, dat het construeren van meer gedetailleerde figuren in het brein, gewoon een zaak van tijd en geduld is.

Bij het bestuderen van de vorm en de ontwikkeling van het kuiken in het ei, is het niet mogelijk om kenmerken te ontdekken die men probeert te bekijken, behalve door het gebruik maken van een microscoop. Daarvoor worden preparaten met behulp van een speciale behandeling gefixeerd en in plakken gesneden. De onderzoeker die al die plakken bekijkt en al hun bijzonderheden opmerkt, construeert vanuit een oneindig aantal plakjes in zijn brein de vorm zoals die oorspronkelijk was. Om op die manier een idee te vormen van een vier-dimensionale figuur, moet een reeks van vaste vormen, die aan elke kant begrensd zijn en in het verloop stuk voor stuk mogelijk in de meest uiteenlopende vorm van elkaar verschillen, in het brein worden opgenomen en tot een totaalbeeld samensmelten.

Als er bijvoorbeeld een klein bolletje zou verschijnen, dat door een groter zou worden vervangen enzovoort, en vervolgens, na het verschijnen van de grootste bol, steeds kleinere bollen zouden opduiken, zou dat een bewijs zijn van een reeks segmenten van een vier-dimensionale bol. In de ruimte is elk segment dan een bol.

Nogmaals, net zoals lichamen op papier in perspectief kunnen worden afgebeeld, kunnen vier-dimensionale figuren worden afgebeeld door middel van lichamen. Als er twee vierkanten zijn, waarbij het ene op het andere ligt, en het onderste wordt weggeduwd, blijven de zijden daarvan parallel aan het vierkant dat daar boven lag. Als vervolgens elk punt van het ene vierkant wordt verbonden met het overeenkomstige punt van het andere, hebben we een juiste afbeelding van een kubus op het papier. Figuur 3 kan worden gezien als een dergelijke afbeelding, waarbij het vierkant CDGH kan worden beschouwd als het vierkant dat is weggeduwd van de plek waarbij het oorspronkelijk onder vierkant ABEF lag. Elk vlak dat de kubus begrenst, wordt op het papier afgebeeld. Het enige dat ontbreekt is de drie-dimensionale inhoud van de kubus. Dus als twee kubussen worden neergezet met hun zijden parallel, maar de een iets diagonaal ten opzichte van de andere, en als dan al hun corresponderende punten met elkaar verbonden worden verondersteld, zal er een aantal lichamen worden aangetroffen, die elk de begrenzende kubussen van een vier-dimensionale figuur voorstellen (maar natuurlijk wel vervormd). En elk vlak en elke lijn in de vier-dimensionale figuur blijkt dan afgebeeld te zijn op een soort perspectieftekening van een lichaam. Wat natuurlijk ontbreekt is de vier-dimensionale inhoud.

Eigenschappen van de Materie in de Vierde Dimensie

Nu we een aantal eigenschappen van vier-dimensionale figuren de revue hebben laten passeren, blijft de vraag wat voor relatie wezens in vier dimensies, als ze bestaan, met ons zouden hebben.

Op de eerste plaats zou een wezen in vier dimensies er voor ons precies hetzelfde uitzien als een wezen in de ruimte. Een wezen in een vlak zou vaste objecten alleen als twee-dimensionale figuren onderscheiden – de gedaanten namelijk waarin zij zijn vlak zouden doorsnijden. Dus als er vier-dimensionale objecten zouden bestaan, zouden wij die alleen als lichamen kennen – namelijk de lichamen waarin zij onze ruimte doorsnijden. Waarom zouden wijzelf dan niet de vier-dimensionale wezens zijn, en onze opeenvolgende toestanden het voorbijtrekken daarvan door de drie-dimensionale ruimte, waartoe ons bewustzijn is beperkt?

Laten wij de vraag nader bekijken. En laten we ter wille van de eenvoud het probleem overzetten naar het geval van drie en twee dimensies in plaats van vier en drie.

Stel je een draadje voor dat door een horizontaal geplaatste dunne waslaag heengaat. Het kan daar op twee manieren doorheen gaan. Het kan er óf loodrecht doorheen worden getrokken, óf het kan, vastgehouden aan beide uiteinden, in zijn geheel naar beneden worden bewogen. Stel je een draad voor die aan beide uiteinden wordt vastgehouden en waarbij de handen loodrecht op de waslaag naar beneden worden bewogen. Als de draad loodrecht op de laag staat, gaat die er gewoon doorheen, maar als de draad wordt vastgehouden en schuin boven de laag wordt uitgestrekt, en als de handen dan loodrecht naar beneden bewegen, zal de draad, als die sterk genoeg is, een insnijding in de laag maken.

Als de waslaag over de mogelijkheid zou beschikken om zich ná de draad weer te sluiten, zou wat er in de laag zou verschijnen een bewegend gaatje zijn.

Stel je voor dat er, in plaats van een laag en een draad, een rechte lijn en een vlak zouden zijn. Als de rechte lijn schuin ten opzichte van het vlak zou worden gehouden en naar beneden zou bewegen, zou die het vlak altijd in een punt doorsnijden, maar dat snijpunt zou vooruit bewegen. Als het vlak zich ná de lijn weer zou kunnen sluiten, dus als dat het karakter van een vloeistof had, zou, wat er zou worden waargenomen, een bewegend punt zijn. Als er nu een heel systeem zou zijn van lijnen die in verschillende richtingen hellen, maar allemaal met elkaar zijn verbonden, en in een raamwerk volstrekt onbeweeglijk worden gehouden en als dat raamwerk met al die lijnen, als geheel, langzaam door het vloeibare vlak, loodrecht daarop, zou passeren, zou er in het vlak een groot aantal bewegende punten verschijnen, evenveel in aantal als het aantal rechte lijnen in het systeem. De lijnen in het raamwerk zullen allemaal even snel bewegen – namelijk met de snelheid van het raamwerk waaraan zij zijn bevestigd. Maar de punten op het vlak zullen verschillende snelheden hebben. Ze zullen sneller of langzamer bewegen, al naar gelang de lijnen die hen doen ontstaan meer of minder schuin verlopen ten opzichte van het vlak. Een rechte lijn die loodrecht op het vlak staat zal, tijdens het passeren, een vast punt doen ontstaan. Een rechte lijn die heel schuin op het vlak staat zal een punt teweegbrengen dat heel snel beweegt. De bewegingen en wegen van de punten zouden worden bepaald door de schikking van de lijnen in het systeem. Het is duidelijk dat als twee rechte lijnen, als een letter X, dwars over elkaar zou liggen, en als die figuur rechtop zou staan en door het vlak heen zou gaan, dat er dan eerst twee punten zouden verschijnen. Deze twee punten zouden elkaar naderen. Als het gedeelte, waar de twee strepen van de X elkaar snijden, het vlak bereiken, zouden de twee punten één worden. Als het bovenste gedeelte van de figuur passeert, zouden de twee punten weer uit elkaar wijken.

Als je veronderstelt dat de lijn aan alle delen van het raamwerk vastzit, over een ander heen gaat en weer een andere ondersteunt (raamwerk ABCD, X en Y zijn twee onderling verbonden lijnen) is het duidelijk dat zij allerlei soorten figuren kunnen aannemen, en dat de

punten op het vlak zeer ingewikkelde bewegingen zouden maken. Figuur 4 stelt een gedeelte van een dergelijk raamwerk voor. Er zijn twee lijnen XX en YY te zien, maar je moet bedenken dat er nog een groot aantal andere lijnen zijn die zowel naar voren, naar achteren als zijwaarts hellen.

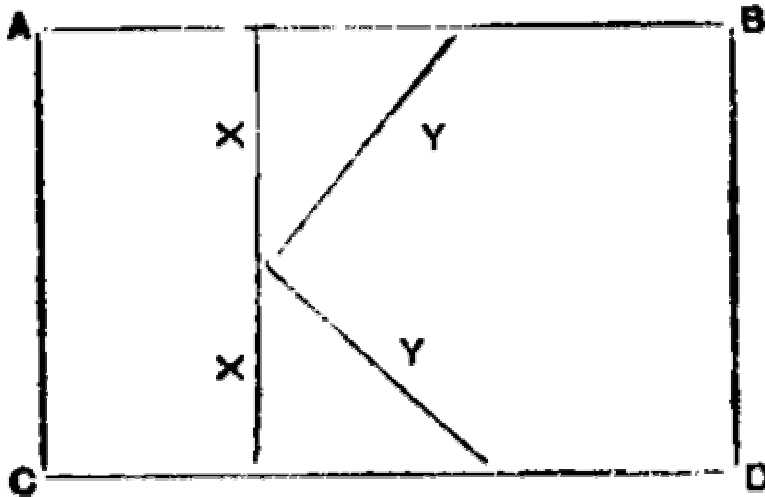


FIGURE 4

Laten we vervolgens aannemen dat er in plaats van lijnen, hele dunne draadjes aan het raamwerk zijn vastgemaakt: zij zouden tijdens het passeren van de vloeistof hele kleine stipjes kunnen doen ontstaan. Laten we die stipjes atomen noemen en ik beschouw ze alsof ze een materiesysteem in het vlak vormen. Er zijn vier voorwaarden waaraan deze stipjes moeten voldoen, als zij zo gezien willen worden, dat ze een materiesysteem vormen, net als het onze. De uiteindelijke eigenschappen van materie (als we de aantrekkende en afstotende krachten elimineren, die door de bewegingen van de kleinste deeltjes worden veroorzaakt) zijn: 1. Duurzaamheid; 2. Ondoordringbaarheid; 3. Inertie; 4. Behoud van energie.

Volgens de eerste voorwaarde, die van de duurzaamheid, mag geen enkele van die stipjes opeens ophouden te bestaan. Dat wil zeggen dat de draad die, door deel te nemen aan de gemeenschappelijke beweging van het systeem, aanleiding geeft tot het bewegende punt, niet af moet breken vóór de rest van het systeem. Als alle lijnen plotseling zouden eindigen, zou dat overeenkomen met een ophouden van de materie.

2. Ondoordringbaarheid. – De ene stip moet niet door een andere heen gaan. Aan deze voorwaarde wordt duidelijk voldaan. Als de draden op geen enkel punt samenvallen, kunnen de bewegende stippen dat ook niet.

3. Inertie. – Een stip moet niet langer bewegen of op één plek blijven, zonder in botsing te komen met een ander punt. Deze voorwaarde wordt verschaft door de duidelijke toestand met betrekking tot de draden, namelijk dat ze, tussen de punten waar ze in aanraking met een andere punt komen, recht moeten zijn. Een gekromde draad zou, bij het passeren van het vlak, aanleiding geven tot een punt dat spontaan in snelheid zou veranderen. Materiedeeltjes doen dat nooit.

4. Behoud van energie. – De energie van een materiesysteem gaat nooit verloren; die gaat alleen van de ene in de andere vorm over, hoewel het kan lijken dat de energie ophoudt. Als we aannemen dat elk van de bewegende stippen op het vlak de eenheid van massa is, vereist het principe van het behoud van energie dat, als twee stippen elkaar tegenkomen, de som van de kwadraten van hun respectievelijke snelheden vóór het samenkomen, dezelfde zal zijn als de som van de kwadraten van hun snelheden ná het samenkomen. We hebben dus gezien dat enige uitspraak over de snelheden van de stippen in het vlak in werkelijkheid een uitspraak is over de hellingen van de draden ten opzichte van het vlak. Het principe van het behoud van energie stelt derhalve een voorwaarde, waaraan voldaan moet worden door de hellingen van de draden ten opzichte van het vlak. Als we deze uitspraak in wiskundige taal vertalen, krijgen we de bewering dat de som van de kwadraten van de tangens van de hoeken die de draden maken met de loodlijn op het vlak, constant blijft.

Vandaar dat alle ingewikkeldheden en veranderingen van een materiesysteem, dat bestaat uit atomen in een vlak, het gevolg zouden kunnen zijn van de eenvormige beweging van een systeem van draden als geheel.

We kunnen ons deze draden samengeweven voorstellen, waarbij ze aaneengevoegde figuren vormen. En als deze figuren door het vloeibare vlak heen gaan doen zij een reeks bewegende punten ontstaan. Toch zou, voor zover van de draden worden aangenomen dat ze samenhangende figuren vormen, de beweging van de punten niet helemaal willekeurig zijn, maar een aantal van hen zou lijken op bewegende figuren. Stel je bijvoorbeeld een aantal draden voor, die zo gegroepeerd zijn dat ze voor een stuk een cilinder vormen, maar even later door andere draden, waarmee ze onderling zijn verbonden, uiteen worden geduwd. Tijdens het passeren van de cilinder door het vlak, zouden we in het vlak een aantal punten in een cirkel zien. Als het gedeelte waar de draden uiteenwijken het vlak zou bereiken, zou de cirkel uit elkaar vallen, door punten die zich verwijderen. Deze in het vlak bewegende figuren zijn slechts de sporen van draden, terwijl die figuren verdergaan. Deze bewegende figuren kunnen worden voorgesteld met een eigen leven en een eigen bewustzijn.

Of, als het onzinnig is om te veronderstellen dat die figuren een bewustzijn hebben, terwijl de figuren waar zij kortstondige sporen van zijn er geen hebben, zouden we heel goed kunnen veronderstellen dat de draadvormen bewustzijn hebben, en dat de bewegende figuren dit bewustzijn delen, maar dat dat in hun geval is beperkt tot de delen van de vormen die gelijktijdig door het vlak heen gaan. In het vlak zouden we dan lichamen kunnen bedenken, met alle eigenschappen van een materiesysteem, die bewegen en veranderen en bewustzijn hebben. Na een poos zou het heel goed kunnen dat een van hen zover uit elkaar raakt, dat het niet langer een eenheid lijkt, en het bewustzijn ervan als zodanig verloren zou kunnen raken. Maar de bestaansdraden van een dergelijke figuur, zijn niet gebroken, noch is de vorm, die daaraan ten grondslag lag, op enige manier veranderd. Die is gewoon door het vlak heengegaan en op een afstand van het vlak geraakt. Derhalve zou er niets ophouden, dat in het bewuste leven op het vlak aanwezig was geweest. In een dergelijk bestaan zou geen oorzaak en gevolg bestaan, maar gewoon een geleidelijke verwezenlijking in een oppervlak van een al bestaand geheel. Er zou ook geen vooruitgang bestaan, tenzij wij zouden aannemen dat de draden tijdens het passeren zichzelf samenweven tot meer complexere vormen.

Kan een beeldg, zoals het voorgaande, worden toegepast, in het geval van het bestaan in de ruimte, met wat wijzelf moeten doen? Is het mogelijk om aan te nemen dat de bewegingen en veranderingen van materiele objecten de doorsnijdingen zijn van een vierdimensionaal

bestaan met een drie-dimensionale ruimte? Mogen wij aannemen dat ons bewustzijn te maken heeft met een ruimtelijke doorsnijding van een of andere hogere werkelijkheid?

Het is onnodig om te zeggen dat alle overwegingen die te berde zijn gebracht met betrekking tot de mogelijkheid van het teweegbrengen van een systeem, waarbij voldaan is aan de voorwaarden van de materie, door het passeren van draden door een vloeibaar vlak, ook geldt voor een vier-dimensionaal bestaan dat door een drie-dimensionale ruimte heengaat. Elk deel van dat ruimere bestaan dat door onze ruimte heen zou gaan, zou voor ons volstrekt beperkt lijken. Wij zouden geen aanwijzing hebben voor de bestendigheid ervan. Zou een dergelijke gedachte worden aanvaard, dan zouden wij ons een of ander ontzagwekkend geheel moeten voorstellen, waarin alles dat ooit is ontstaan of zal ontstaan naast elkaar bestaat, dat langzaam voorbijgaat en in dit trillende bewustzijn van ons, dat is begrensd tot een enge ruimte en een enkel moment, een rumoerig verslag achterlaat van veranderingen en wisselvalligheden, die zonder onszelf bestaan. Het lijkt alsof verandering en beweging het enige is wat er bestaat. Maar het optreden daarvan zou slechts te wijten zijn aan het tijdelijk door ons bewustzijn heen gaan van eeuwig bestaande werkelijkheden.

Als we over deze zaken nadenken is het moeilijk om ons te ontdoen van de gewoonte om iets visueel of tastbaar af te beelden. Als we bedenken dat iemand in vier dimensies bestaat, is het moeilijk om onszelf ervan te weerhouden om ons voorstellen, dat hij in een reeds bekende dimensie blijft bestaan. Het beeld dat wij vormen lijkt wat op die plechtstatige Egyptische standbeelden die aan de voorkant redelijk goed een of andere waardige zittende figuur afbeelden, die echter tot hun oren zijn ondergedompeld in een gladde steenmassa, die precies met hun omtrek samenvalt.

Geen enkel materieel beeld is bruikbaar. Organische wezens lijken voor ons zo compleet dat elke toevoeging hun schoonheid zou aantasten. Toch zou de contour van een Corinthische zuil, als wij tot een vlak zouden zijn beperkt, waarschijnlijk van een schoonheid zijn, die in zijn soort niet zou zijn te verbeteren. Wij zouden niet in staat zijn om daar enige toevoeging bij te bedenken, om de eenvoudige reden dat elke toevoeging die wij zouden kunnen verzinnen, van het soort zou zijn van een toevoegen van een onooglijke uitbreiding van de contour. Toch zien we, in beweging als we zijn in de ruimte van drie dimensies, dat de schoonheid van de statige zuil die van enige afzonderlijke contour ver overstijgt. Dus het enige wat we kunnen doen is dat we onszelf het vermogen ontzeggen om te oordelen over de ideale volmaaktheid van vormen in vier dimensies.

Bewijs van een Vierde Dimensie

We zullen nu afstappen van dit beeld van raamwerk en draden. Laten we de opvatting van een vier-dimensionaal bestaan onderzoeken op een eenvoudiger een meer natuurlijke manier, op dezelfde manier waarop een twee-dimensionaal wezen over ons zou denken, niet als eindig in de derde dimensie, maar al beperkt tot drie dimensies, zoals hijzelf dat tot twee is. Een wezen dat in vier dimensies bestaat moet dus worden gedacht als volledig begrensd in alle vier de richtingen, zoals wij dat in drie zijn. Het enige dat we kunnen zeggen met betrekking tot de mogelijkheid van dergelijke wezens is dat we geen ervaring hebben met het bewegen in vier richtingen. De vermogens van dergelijke wezens en hun ervaring zouden uitgebreider kunnen zijn, maar er zou geen fundamenteel verschil bestaan in de wetten van kracht en beweging.

Een dergelijk wezen zou in staat zijn om slechts een deel van zichzelf voor ons zichtbaar te maken, want een kubus zou door een twee-dimensionaal wezen worden opgevat als het vierkant waarin het zelf stond. Zo zou een vier-dimensionaal wezen plotseling verschijnen als een compleet en eindig lichaam, en even plotseling in de ruimte verdwijnen, waarbij het geen spoor van zichzelf zou achterlaten, op dezelfde manier als iets dat op een plat vlak ligt, als het wordt opgetild, plotseling uit het blikveld zou verdwijnen van wezens, waarvan het bewustzijn was beperkt tot dat vlak. Het voorwerp zou niet vervagen door het in een bepaalde richting te bewegen, maar zou meteen in zijn geheel verdwijnen. Wij zouden geen belemmering, geen beperking kunnen bedenken, die niet voor hem volstrekt open zouden zijn. Het wezen zou komen en gaan naar believen; het zou in staat zijn om de meest verbazingwekkende kunststukjes te verrichten. Het zou mogelijk zijn om onze ruimte, door een oneindig vlak, dat zich naar alle richtingen uitstrekt, te verdelen in twee gedeelten, die volstrekt van elkaar zouden zijn gescheiden; maar een vier-dimensionaal wezen zou met het grootste gemak om dit vlak heen kunnen glippen.

Laten we, om dit duidelijk te kunnen zien, eerst het analoge geval in drie dimensies nemen. Stel je een stuk papier voor dat een vlak voorstelt. Als het oneindig uitgestrekt is in alle richtingen, zal het een oneindig vlak voorstellen. Het kan in twee delen worden verdeeld door een oneindige rechte lijn. Een wezen dat beperkt is tot dit vlak zou niet van het ene deel in het andere kunnen komen, zonder die lijn te passeren. Maar stel je nu een anders stuk papier voor, dat op het eerste is gelegd en dat ook oneindig groot is. Het zal dan een ander oneindig vlak voorstellen. Als het wezen zich door een beweging in de derde dimensie van dit eerste vlak af beweegt, zal het naar dit nieuwe vlak toe bewegen. Daarin zal het geen lijn aantreffen. Laat het nu naar een zodanige positie bewegen, dat het aan de andere kant van de lijn terechtkomt, als het naar het eerste vlak terug zou gaan. Laat het vervolgens teruggaan naar het eerste vlak. Het verschijnt nu aan de andere kant van de lijn, die het oneindige vlak in twee delen verdeelt.

Neem nu het geval van vier dimensies. Bedenk, in plaats van dat je je een vel papier voor de geest haalt, een lichaam met drie dimensies. Als dit lichaam oneindig groot zou worden, zou het de hele drie-dimensionale ruimte innemen. Maar het zou niet de hele vier-dimensionale ruimte opvullen. Het zou voor de vier-dimensionale ruimte zijn, wat een oneindig vlak voor de drie-dimensionale ruimte is. In de vier-dimensionale ruimte zou een oneindig aantal van dergelijke lichamen aanwezig kunnen zijn, net als in de drie-dimensionale ruimte een oneindig aantal oneindige vlakken kan bestaan.

Zo kan er naast onze ruimte een ruimte worden bedacht, die eveneens oneindig is in alle drie de richtingen. Om van de ene naar de andere te komen, moet een beweging in de vierde dimensie worden gemaakt, net zoals er een beweging in de derde dimensie moet worden gemaakt om van het ene oneindige vlak in het andere terecht te komen.

Bedenk vervolgens een lichaam, overeenkomstig het bovengenoemde eerste vel papier. En omdat van het vel papier werd aangenomen dat het zich oneindig in twee richtingen uitbreidde, neem dus ook aan dat het lichaam zich in zijn drie dimensies oneindig uitstrekt, zodat het de hele ruimte, zoals wij die kennen, opvult.

Verdeel nu dit oneindige lichaam door een oneindig vlak in twee delen, net zoals het oneindige papieren vlak door een oneindige lijn in tweeën was verdeeld. Een wezen kan niet van het ene gedeelte van dit oneindige lichaam in een ander komen, aan de andere kant van

dit oneindige vlak, zonder door het oneindige vlak heen te gaan, *zolang het binnen in het oneindige lichaam blijft.*

Maar stel je nu naast dit oneindige lichaam een tweede oneindig lichaam voor, dat er in de vierde dimensie naast ligt, net als het tweede oneindige papieren vlak naast het eerste oneindige vlak lag in de derde dimensie. Laat nu dat wezen dat naar de andere kant van het verdelende vlak wil, verdwijnen in de vierde dimensie en het tweede oneindige lichaam binnengaan. In dit tweede lichaam bestaat geen verdelend vlak. Laat het nu zo bewegen, dat het zich, als het terugkeert naar het eerste oneindige lichaam, aan de andere kant van het oneindige vlak bevindt, zonder dat het daar doorheen is gegaan.

Op een soortgelijke manier zou een wezen, dat in staat is om in vier dimensies te bewegen, uit een gesloten doos kunnen komen, zonder door de zijanten heen te gaan, want het zou kunnen verdwijnen in de vierde dimensie en vervolgens wat rondreizen, zodat het zich bij zijn terugkeer buiten de doos zou bevinden.

Bestaat er in de wereld zoals wij die kennen, iets dat een aanwijzing zou kunnen geven voor de mogelijkheid, dat er een bestaan in vier dimensie is? Op deze vraag kan geen definitief antwoord worden gegeven. Maar het zou misschien van enig belang kunnen zijn om erop te wijzen dat er bepaalde feiten bestaan, die bestudeerd zouden kunnen worden, in het licht van de vier-dimensionale theorie.

Laten we, om dit duidelijk te maken, aannemen dat de ruimte werkelijk vier-dimensionaal is, en dat de drie-dimensionale ruimte die wij kennen, in deze uitgebreidere ruimte, net zo is als een oppervlak in onze ruimte.

In die uitgebreidere ruimte zouden wij net zo zijn als wezens, die beperkt zijn tot het oppervlak van een vlak, dat in onze ruimte zouden zijn. Laten we aannemen dat er, net als in onze ruimte, aantrekkingspunten bestaan, waarvan de invloed naar elke richting uitstraalt, zodat in deze uitgebreidere ruimte aantrekkingspunten zijn, waarvan de invloed uitstraalt naar elke richting. Kan er in de natuur iets worden waargenomen, dat overeen zou kunnen komen met het effect van een aantrekkingspunt, dat buiten onze ruimte ligt, en zijn werking op alle materie daarin uitoefent? De werking van een dergelijk aantrekkingspunt zou niet zijn om beweging teweeg te brengen in enige bekende richting, omdat het namelijk buiten enige bekende richting ligt.

We zullen nu overgaan tot het overeenkomstige geval in drie en twee dimensies, in plaats van vier en drie. We zullen ons een horizontaal liggend vlak voorstellen, en daarin een aantal schepsels waarvan de ervaring tot dat vlak is beperkt. Als er nu wat water of een andere vloeistof op het vlak zou worden gegoten, zouden de schepsels, die dat zouden opmerken, ontdekken dat het een neiging zou vertonen om zich over het hele vlak te verspreiden. In werkelijkheid zou het voor hen niet zo zijn, als een vloeistof voor ons is – het zou eerder overeenkomen met een gas. Want zoals we weten heeft een gas de neiging om zich naar alle kanten uit te breiden, en geleidelijk in omvang toe te nemen, om de hele ruimte te vullen. Het oefent druk uit op elk vat waarin wij het opsluiten.

De vloeistof op het vlak verspreidt zich in alle dimensies die de twee-dimensionale schepsels op het vlak kennen, en tegelijkertijd wordt het geringer in de derde dimensie, terwijl de absolute hoeveelheid hetzelfde blijft. Op dezelfde manier kunnen wij veronderstellen dat

gassen (die door uitzetting omvangrijker worden in de dimensies die wij kennen) geringer worden in de vierde dimensie.

In dit geval zou de oorzaak moeten worden gezocht in een aantrekkingskracht, die ten opzichte van onze ruimte net zo werkt als de zwaartekracht ten opzichte van een horizontaal vlak.

Mogen we aannemen dat er ergens in de vierde dimensie een aantrekkingspunt bestaat, en dat de gassen, waarvan we weten dat het gewoon meer beweeglijke vloeistoffen zijn, zich onder invloed daarvan in elke richting verspreiden? Deze visie wordt in zekere zin ondersteund door het experimenteel bewezen feit, dat er geen absolute scheidslijn bestaat tussen een vloeistof en een gas. De een kan in de ander overgaan zonder dat er een moment optreedt waarop men kan zeggen dat er precies dan een verandering van de toestand plaats heeft gevonden.

We zouden kunnen veronderstellen dat de materie, waarvan wij weten dat die zich in drie dimensies uitstrekt, ook een geringe dikte in de vierde dimensie heeft; dat lichamen net zo stijf zijn in de vierde als in de andere drie dimensies; dat vloeistoffen te zeer samenhangen om zich in de ruimte uit te kunnen breiden en in de vierde dimensie dunner worden, onder invloed van een aantrekkingspunt dat buiten onze ruimte ligt; maar dat gassen, dankzij de grotere beweeglijkheid van hun deeltjes, wel onderhevig zijn aan activiteit van dat punt, en dat ze zich onder die invloed in de ruimte verspreiden, op dezelfde manier waarop vloeistoffen zich, onder invloed van de zwaartekracht, op een vlak uitbreiden.

De dichtheid van een gas zou dan een maat zijn van de relatieve dikte ervan in de vierde dimensie: en de afname van de dichtheid zou dan overeenkomen met een afname van de dikte in de vierde dimensie. Zou deze veronderstelling op enige manier getoetst kunnen worden?

Stel je een wezen voor dat tot een vlak is beperkt. Als het vlak naar een grote afstand van het aantrekkingspunt, dat daarbuiten ligt, wordt gebracht, zou het wezen merken dat vloeistoffen minder geneigd zijn om zich te verspreiden dan tevoren.

Of stel je voor dat het wezen zich naar een afgelegen deel van het vlak beweegt, zodat de lijn van zijn positie tot het aantrekkingspunt schuin ten opzichte van het vlak ligt; het zou dan merken dat in deze positie een vloeistof de neiging zou hebben om zich meer in de ene dan in de andere richting te verspreiden.

Nou zou onze ruimte, waarvan wordt verondersteld dat die in de vier-dimensionale ruimte ligt, zoals een vlak in de drie-dimensionale ruimte ligt, van plaats veranderd kunnen zijn. En het uitzettingsvermogen van gassen zou verschillend kunnen zijn in verschillende tijdperken. Of er zou, omdat wij onze positie in de ruimte veranderen tijdens de omloop van de aarde rond de zon, een voldoende verschil in onze positie in de ruimte kunnen ontstaan, ten opzichte van het aantrekkingspunt, om het uitzettingsvermogen van gassen te veranderen op andere tijden van het jaar, of ervoor te zorgen dat zij in de ene richting een groter uitzettingsvermogen aan de dag leggen dan in de andere.

Maar hoewel deze veronderstelling tot op zekere hoogte uitgewerkt zou kunnen worden, is het nauwelijks te veronderstellen, dat die enige definitieve toets zou kunnen verschaffen voor het fysische bestaan van een vierde dimensie. Er is geen enkele toets ontdekt die doorslaggevend is. Voordat naar toetsen kan worden uitgezien, moet inderdaad eerst een uiterst belangrijk

theoretisch punt bepaald worden. Als we de meetkundige eigenschappen van rechte lijnen en vlakken behandelen, nemen we aan dat ze respectievelijk een en twee dimensies hebben, en daardoor ontzeggen wij hen elk werkelijk bestaan. Een vlak en een lijn zijn louter abstracties. Als we wezens op een vlak niet louter als imaginair willen beschouwen, moeten wij hen een bepaalde dikte toekennen. Als hun ervaring is dat ze tot een vlak zijn beperkt, moet die dikte heel klein zijn vergeleken met hun andere dimensies. Als wij deze redenering overbrengen naar het geval van vier dimensies, komen we tot een merkwaardig resultaat.

Als er een vierde dimensie bestaat zijn er twee mogelijke alternatieven.

De ene is dat, terwijl er vier dimensies zijn, wij uitsluitend over een drie-dimensionaal bestaan beschikken. De andere mogelijkheid is dat we echt een vier-dimensionaal bestaan hebben, maar dat wij ons daar niet bewust van zijn. Als wij ons in drie dimensies bevinden, terwijl er in werkelijkheid vier dimensies zijn, dan moeten wij ons net zo verhouden tot wezens die in de vierde dimensie bestaan, als lijnen en vlakken zich tot ons verhouden. Dat wil zeggen dat wij louter abstracties moeten zijn. In dat geval moeten we alleen maar bestaan in de geest van een wezen dat ons bedenkt, en moet ons ervaren louter de gedachte van die geest zijn – een conclusie die, op onafhankelijke gronden, duidelijk al door een idealistische filosoof is getrokken.

Het andere alternatief is dat wij wel over een vier-dimensionaal bestaan beschikken. In dat geval moeten onze afmetingen daarin oneindig klein zijn, anders zouden wij ons daar wel bewust van zijn. Als dat het geval zou zijn, zou het waarschijnlijk in de elementaire deeltjes zijn, dat wij de vierde dimensie zouden ontdekken, want in de elementaire deeltjes zijn de afmetingen in de drie dimensies zeer klein, en zouden de grootten in alle vier dimensies vergelijkbaar zijn.

De bovengenoemde alternatieve aannames zijn gebaseerd op de hypothese van de werkelijkheid van het vier-dimensionale bestaan, en moet worden opgevat als uitsluitend geldend voor die hypothese.

Het is nogal vreemd om te merken dat wij op die manier kunnen denken dat een bestaan, dat afhankelijk is van het bestaan dat wijzelf ervaren, louter als een abstractie moet bestaan.

Afgezien van het belang van dergelijke speculaties, hebben ze een aanzienlijke waarde; want zij stellen ons in staat om aan zaken, waar wij ons geen beeld van kunnen vormen, in begrijpelijke bewoordingen uitdrukking te geven. Ze verschaffen ons als het ware een steigerwerk, waarvan het brein gebruik kan maken, bij het construeren van zijn opvattingen. En de bijkomende winst voor ons voorstellingsvermogen is zeer groot.

Veel filosofische ideeën en leerstellingen zijn vrijwel onbegrijpelijk, omdat er geen fysisch beeld bij bestaat, dat kan dienen om ze weer te geven. In het denkbeeldige fysische bestaan dat wij hebben geschetst, vindt veel wat filosofen hebben geschreven een juiste weergave. Veel van Spinoza's *Ethica*, bijvoorbeeld, zou met behulp van de voorgaande bladzijden kunnen worden gesymboliseerd.

Op die manier zouden we volstrekt legitiem kunnen discussiëren en conclusies kunnen trekken met betrekking tot zaken waar wij ons geen voorstelling van kunnen vormen.

Het is natuurlijk duidelijk dat deze speculaties geen kenmerkende eigenschap weergeven van een direct contact met de werkelijkheid. Maar dat is geen reden om daar afstand van te doen. De voortgang van kennis is als het stromen van een machtige rivier, die tijdens haar loop door de rijke laaglanden, de bijdragen van elk dal in zich bijeengaat. Een dergelijke rivier kan soms heel goed samenkomen met een bergstroom die, na een moeizaam traject door de dorre hooglanden, zichzelf langs een steile helling in de grotere rivier neerstort en op het moment van de vereniging het schouwspel biedt van de opperste schoonheid, waartoe het geheel van de rivier in staat is. Een dergelijke stroom is geen ongeschikt symbool van een richting van wiskundig denken die, tijdens het doorkruisen van ingewikkelde en abstracte regionen, ter wille van haar kristalheldere helderheid de rijkdom opoffert die bij meer concrete disciplines behoort. Een dergelijke ontwikkeling kan vruchteloos eindigen, want het zou kunnen dat die zich nooit bij de hoofdrichting van waarneming en experiment zou aansluiten. Maar als zij de weg vindt naar de grote stroom van kennis, levert dat op het moment van het samenkomen het schouwspel op van de allergrootste intellectuele schoonheid en voegt wat kracht en geheimzinnig vermogen toe aan de voortgaande stroom.

*URL: <http://www.tiac.net/users/eldred/chh/h1.html>
Eric Eldred - 1996-11-08*